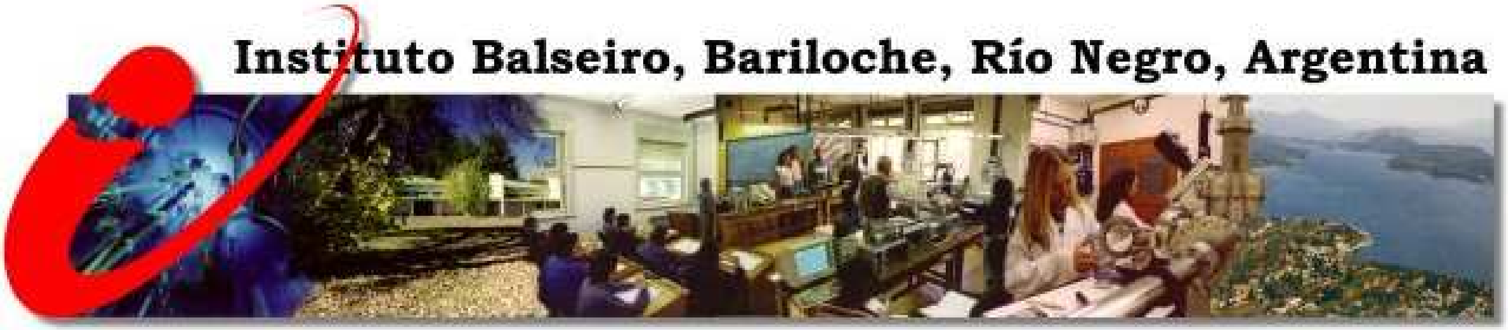


# Leyes de conservación

R. O. Barrachina

*Un miliciano filósofo que nos acompañaba recogió el trozo de plomo al pie de la biblioteca:*
*- Es increíble que esto pueda matar a un hombre. ¿Qué daño quieren ustedes que le cause al organismo un pedacito de metal de esta clase?*
*- ¿?*
*- ¡Lo terrible es la velocidad que trae! ¡Lo que mata es la velocidad!...*
*Alejo Carpentier: Palabras en el tiempo.*

## 1. Conservación de la cantidad de movimiento

El filósofo frances René Descartes (1596 - 1650) fue uno de los principales propulsores de una idea que se retomaría con nuevo ímpetu en la primer década del siglo XX. Me refiero a los procesos de colisión, ó fenómenos de la *percusión*, como los llamó él. Ya un contemporáneo de Galileo, el profesor de Praga Jan Marek Marci[1] había realizado algunos experimentos sobre los fenómenos de colisión, publicando sus resultados en un trabajo titulado "De proportione motus" (Praga, 1639). El mismo Galileo había propuesto que se lograría una mejor comprensión de los procesos dinámicos en base a un cuidadoso estudio experimental de la interacción entre dos partículas en movimiento. Descartes era 32 años más joven que Galileo, y sin embargo a ambos lo separaba algo más que la edad o la distancia. En particular, y por muy sorprendente que parezca, no hay ningún indicio de que Descartes haya llegado a leer los trabajos de Galileo. Por otro lado, mientras Galileo había comenzado a construir la mecánica de abajo hacia arriba, a través de una descripción detallada de los procesos más simples; Descartes intentaba lograr lo mismo trabajando desde arriba hacia abajo. Su objetivo era construir una filosofía general que reemplazara a la de los escolásticos[2]. Para ello ponía el énfasis en la meditación y el método analítico, construyendo la ciencia a partir de algunos pocos *Principios Fundamentales*. Descartes no llegó a concretar estos objetivos, pero dejó dos marcas indelebles en la historia de la Física. En primer lugar enfatizó la importancia del estudio de la interacción entre dos partículas. Más tarde, Newton adoptaría esta idea. En segundo lugar, y en el proceso de estudiar este problema, Descartes demostraría el poder de una nueva manera de plantear las leyes de la naturaleza, las llamadas *leyes de conservación*. Descartes había planteado una serie de *leyes de movimiento* que eran obedecidas por cuerpos en colisión. Sin embargo, más tarde se encontró que muchas de sus conclusiones eran incorrectas. Así que en 1668 (al término de la Gran Plaga que asoló Inglaterra y a la que haremos referencia en otro apunte), la *Real Sociedad* de Londres solicitó a sus socios que presentaran proposiciones correctas y definitivas para las leyes del movimiento.

> ... [para] llevar a un solo punto de vista lo que aquellos excelentes hombres, Galileo, Descartes, Honorato Fabri, Joaquín Jungius, Borelli y otros habían inventado.

Se presentaron tres trabajos. Una monografía, con el título de *Tractatus de Motu* fue presentada el 26 de noviembre de 1668 por el matemático inglés John Wallis (Ashford, 1616 - Oxford, 1703), conocido no sólo por haber introducido el símbolo $\infty$ y la notación exponencial, sino también por sus terribles peleas con Descartes y Huygens. Otro trabajo, perteneciente a Sir Christopher Wren, fue aceptado por la Real Sociedad el 17 de diciembre. Finalmente, el científico holandés Christian Huygens (1629 - 1695) presentó un tercer trabajo, el 4 de enero de 1669. Wallis trató únicamente el choque inelástico. Wren y Huygens sólo el choque elástico. Wren había probado experimentalmente sus proposiciones, que en esencia coinciden con las de Huygens. Estos experimentos son mencionados por Newton en sus *Principia*, y aparecen descritos en una forma ampliada en un trabajo de Mariotte titulado “Sur le choc des corps”. Por otra parte, Wallis publicó su teoría del choque en un trabajo aparecido en 1671: “Mechanica sive de motu”. Por último, las ideas de Huygens aparecen descritas en su libro póstumo “De motu corporum ex percussione” (1703). Los trabajos de Wallis y Huygens resultaron estar particularmente acertados al mostrar que *la cantidad de movimiento* (es decir, el producto de la masa por la velocidad, $m\mathbf{v}$) tenía propiedades vectoriales y que se conservaba en una colisión.

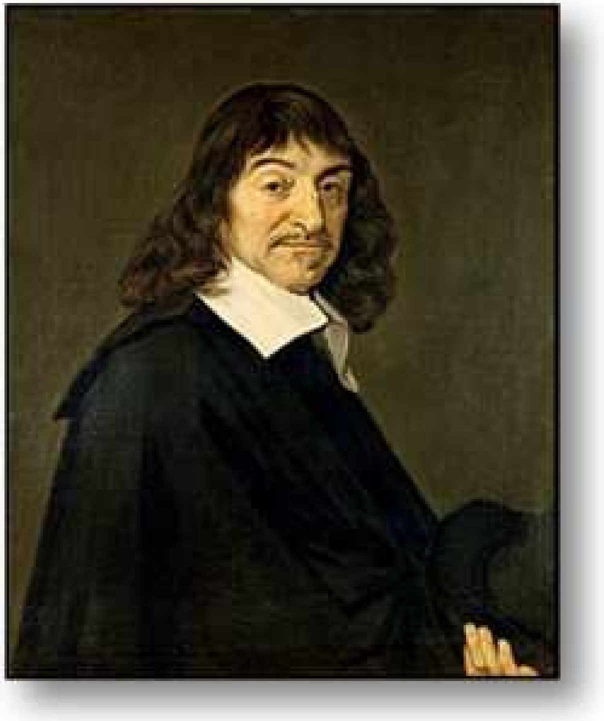

Figura 1. René Descartes. Nació el 31 de marzo de 1596 en La Haya de Turena (desde 1967 Descartes, en honor al filósofo). Falleció el 11 de febrero de 1650 en Estocolmo.

Para un sistema de $N$ partículas definimos el impulso total como

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i \; .$$

Derivando respecto al tiempo obtenemos

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \; ,$$

donde $\mathbf{F}_i$ es la resultante de todas las fuerzas aplicadas sobre la $i$-ésima partícula. A diferencia del caso de una partícula, aquí debemos distinguir entre las fuerzas producidas por agentes externos al sistema, y las fuerzas de acción y reacción entre las mismas partículas del sistema. De esta manera tenemos para la partícula $i$ que

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{\mathrm{ext}} + \sum_{j=1}^{N} \mathbf{F}_{ij} \ ,$$

donde, $\mathbf{F}_{ij}$ es la fuerza que la partícula $j$ ejerce sobre la partícula $i$. Naturalmente, $\mathbf{F}_{ii} = 0$. Reemplazando en la ecuación anterior obtenemos

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathbf{F}_i^{\mathrm{ext}} + \sum_{i,j} \mathbf{F}_{ij} \ .$$

Las fuerzas internas se equilibran de a pares (Ley de acción y reacción). Por lo tanto obtenemos

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}_{\mathrm{ext}} \ ,$$

donde $\mathbf{F}_{\mathrm{ext}} = \sum_i \mathbf{F}_i^{\mathrm{ext}}$ es la resultante de todas las fuerzas "externas" aplicadas sobre el sistema. Vemos entonces que si $\mathbf{F}_{\mathrm{ext}} = 0$, $\mathbf{P} =$ constante, es decir

> Para un sistema de partículas en única y exclusiva interacción mutua, la cantidad de movimiento total se conserva.

## 2. Centro de masa

Si las masas $m_i$ de las partículas individuales no varían,

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i \\ &= M \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_{cm}}{\mathrm{d}t} \ , \end{aligned}$$

donde $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$ es la masa total del sistema y

$$\mathbf{r}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i$$

señala un punto del espacio que llamaremos *centro de masa* del sistema. Vemos que la cantidad de movimiento total de un sistema de partículas es igual al producto de la masa total del sistema por la velocidad de su centro de masa. O sea que el centro de masa se mueve como si toda la masa del sistema estuviera concentrada en él y todas las fuerzas externas se aplicaran en ese punto. Si no actúan fuerzas externas, la velocidad del centro de masa es constante y se lo puede utilizar como base de un sistema de referencia inercial.

## 3. Problema equivalente de un cuerpo

La anterior definición del centro de masa permite lograr una muy importante simplificación del problema de varias partículas. Para un sistema de $N$ partículas *aisladas* en interacción mutua, las ecuaciones de Newton

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{F}_{ij} \ ,$$

con $\mathbf{F}_{ii} = 0$, representan un sistema de $3N$ ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden. Las $6N$ constantes que definen su solución están dadas por las componentes de las posiciones y velocidades iniciales de todas las partículas. Siendo que el sistema está aislado, el movimiento "rectilineo y uniforme" de su centro de masa $\mathbf{r}_{cm}$ está completamente determinado por la condición inicial. Esto hace que las $3N$ coordenadas del sistema estén relacionadas por las 3 ecuaciones que determinan la posición del centro de masa en cada instante, $\mathbf{r}_{cm} = \sum_{i=1}^{N} (m_i/M)\, \mathbf{r}_i$. Esto permite reducir a $3N - 3$ el número de variables independientes del sistema. Así, el caso de una sola partícula aislada es trivial, y el caso de dos partículas puede reducirse a un problema equivalente de un cuerpo.

En efecto, consideremos un sistema de 2 partículas aisladas en interacción mutua por una fuerza que, en principio, sólo puede ser función de la posición relativa entre ambas partículas $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, de sus derivadas y, eventualmente, del tiempo, $\mathbf{F}_{12} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \ldots, t)$. La posición relativa $\mathbf{r}$ y la del centro de masa $\mathbf{r}_{cm}$ permiten describir completamente el estado del sistema.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{r} + \mathbf{r}_{cm} \, , \\ \mathbf{r}_2 &= -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r} + \mathbf{r}_{cm} \, . \end{aligned}$$

Puesto que $\mathbf{r}_{cm}$ es conocido, sólo necesitamos encontrar $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Para ello escribimos la segunda ley de Newton para una de las partículas, digamos la partícula 1,

$$\mathbf{F} = m_1 \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}_1}{\mathrm{d}t^2} \, .$$

Ahora reemplazamos la expresión anterior para $\mathbf{r}_1$

$$\mathbf{F} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} + m_1 \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}_{cm}}{\mathrm{d}t^2} \, .$$

Finalmente, como $\mathrm{d}^2\mathbf{r}_{cm}/\mathrm{d}t^2 = 0$, obtenemos

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \ldots, t) = m \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} \, ,$$

donde hemos definido la "masa reducida"

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \, .$$

Trabajando sobre la segunda ley de Newton para la partícula 2 arribaríamos a exactamente la misma ecuación. Vemos que la ecuación anterior coincide con la segunda ley de Newton para una sola partícula de masa $m$ a una distancia $\mathbf{r}$ de un centro de fuerzas "fijo". Por esta reducción a un problema equivalente de una partícula, el problema de dos cuerpos es resoluble. En cambio, para $N > 2$, y salvo en casos muy particulares, la solución del problema es imposible analíticamente.

## 4. La "fuerza viva"

Habíamos visto como, en respuesta a una solicitud de la Royal Society para sistematizar las leyes del movimiento, se presentaron tres monografías escritas por el arquitecto Sir Christopher Wren, por el matemático John Wallis y por el científico holandés Christian Huygens. Los trabajos de Wallis y Huygens proponían acertadamente una ley de conservación de la cantidad de movimiento, que estudiamos en otro apunte. Sin embargo, Huygens avanzaría un paso más que sus colegas.

En esta búsqueda de leyes dinámicas emprendida por la Royal Society, Huygens corría con una enorme ventaja sobre sus colegas ya que conocía las ideas de Descartes de primerísima mano. Era hijo de un diplomático francés en cuya casa Descartes se alojaba con frecuencia. Aunque al final Huygens rechazó el sistema filosófico de Descartes, logró rescatar aquellas ideas que eran de mayor utilidad para la física, y corregir algunos de los errores más gruesos del filósofo francés. De esta manera Huygens pudo llegar más lejos que Wallis y Wren, al plantear otra ley de conservación sumamente novedosa, que él mismo resumió en la siguiente proposición:

> La suma de los productos resultantes de multiplicar la masa de cada cuerpo duro por el cuadrado de su velocidad, es la misma antes y después del choque.

Casi tres décadas después, en 1695, el alemán Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) redescubriría la misma cantidad $mv^2$, dándole el nombre de *vis viva* o *fuerza viva*. En resumen, lo que Huygens y Leibniz estaban diciendo es que la suma de las *fuerzas vivas* de todos los objetos que intervienen en una colisión es la misma antes y después de dicha colisión. El que Newton usara la misma terminología de *fuerza* para designar a una cantidad completamente distinta, hizo que se generara una gran confusión y polémicas muy encendidas. Estas dificultades prevalecieron inclusive hasta mediados del siglo XIX.

Figura 2. Christiaan Huygens. Nació en La Haya el 14 de abril de 1629. Falleció en la misma ciudad, el 8 de julio de 1695).

## 5. Trabajo y energía

En la práctica, el desplazamiento de los cuerpos se realiza bajo la acción de fuerzas. De ello surge la necesidad de caracterizar la acción de las fuerzas relacionadas con dichos movimientos. Volvamos entonces a nuestro "problema piloto" de dos partículas aisladas en interacción mutua. Esta interacción está caracterizada por una fuerza $\mathbf{F}_{12} = \mathbf{F}$. Como antes, anotamos con $\mathbf{r}$ al vector posición de la partícula 1 respecto de la partícula 2. Definimos el "trabajo" de la fuerza $\mathbf{F}$ entre una configuración inicial $a$ y otra final $b$ como la integral de línea

$$W = \int_a^b \mathbf{F}.\mathrm{d}\mathbf{r}$$

a lo largo de la trayectoria $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Aplicando la tercera ley de Newton ($\mathbf{F} = \mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$) podemos escribir esta ecuación como

$$\begin{aligned} W_{ab} &= \int_a^b \mathbf{F}_{12}.\mathrm{d}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \\ &= \int_a^b \mathbf{F}_{12}.\mathrm{d}\mathbf{r}_1 + \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \mathbf{F}_{21}.\mathrm{d}\mathbf{r}_2 \,. \end{aligned}$$

Ahora aplicamos la segunda ley de Newton,

$$\begin{aligned} W_{ab} &= \int_a^b m_1 \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_1}{\mathrm{d}t}.\mathrm{d}\mathbf{r}_1 + \int_a^b m_2 \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_2}{\mathrm{d}t}.\mathrm{d}\mathbf{r}_2 \\ &= m_1 \int_a^b \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_1}{\mathrm{d}t}.\mathbf{v}_1\,\mathrm{d}t + m_2 \int_a^b \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_2}{\mathrm{d}t}.\mathbf{v}_2\,\mathrm{d}t \\ &= \left( \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \Big|_b - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \Big|_a \right) + \left( \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \Big|_b - \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \Big|_a \right) \\ &= (T_1 + T_2)_b - (T_1 + T_2)_a \,, \end{aligned}$$

donde hemos definido la *energía cinética* $T_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$. El resultado anterior puede enunciarse diciendo que el trabajo realizado para pasar de una configuración $a$ a otra $b$ es igual a la correspondiente variación de la energía cinética $T_1 + T_2$.

## 6. Fuerzas conservativas

Supongamos que el trabajo realizado por una fuerza en un circuito cerrado cualquiera –donde volvemos a la misma configuración inicial– es nulo. Su capacidad para realizar trabajo se ha conservado. Decimos que dicha fuerza es *conservativa*. En virtud de los teoremas fundamentales de las integrales curvilíneas, podemos expresar esta condición en una forma más abstracta, indicando que una fuerza $\mathbf{F}$ es conservativa si y sólo si es gradiente de una cierta función escalar[3] $V$, que llamaremos *energía potencial*

$$\mathbf{F} = -\nabla V \ .$$

El signo es convencional. Vemos además que $V$ está definida a menos de una constante aditiva arbitraria.

Volvamos entonces a nuestro sistema de dos partículas y supongamos que la fuerza de interacción entre ambas es conservativa respecto de la posición relativa, $\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r})$. El trabajo realizado por dicha fuerza es

$$\begin{aligned} W_{ab} &= \int_a^b \mathbf{F}.\mathrm{d}\mathbf{r} \\ &= -\int_a^b \nabla V(\mathbf{r}).\mathrm{d}\mathbf{r} \\ &= -(V_b - V_a) \ . \end{aligned}$$

Reemplazando $W_{ab}$ por su expresión en términos de la energía cinética, encontramos finalmente que $(T_1+T_2+V)_a = (T_1+T_2+V)_b$. Esto lo expresamos diciendo que la energía total,

$$E = T_1 + T_2 + V \ ,$$

se conserva. Todavía nos falta un paso para llegar a la ley de conservación tal como la expresó Huygens al decir que

> La suma de los productos resultantes de multiplicar la masa de cada cuerpo duro por el cuadrado de su velocidad, es la misma antes y después del choque.

¿Dónde está el potencial en esta ley? Ocurre que mucho antes y mucho después de una colisión, las partículas están tan alejadas una de otra que se puede suponer que $V = 0$.

## 7. ¿De quién es la energía potencial?

Una muy importante aclaración: En general muchos libros de texto hablan de la energía potencial de una partícula, cuando –por lo que sabemos hasta ahora– la energía potencial asociada a una interacción es una propiedad del par de partículas sobre el cual actúa, y no de uno u otro cuerpo. Tampoco tiene sentido asignar parte de la energía potencial a uno y parte a otro.

Volvamos a nuestro ejemplo de la interacción entre dos partículas aisladas. Supongamos que decidimos definir la energía total de la partícula 1 como $E_1 = T_1 + V$. Vemos entonces que esta energía $E_1 = E - T_2$, arbitrariamente asignada a la partícula 1, no se conserva, a pesar de que sobre ella sólo actúa una fuerza conservativa (!).

Sin embargo, es muy común trabajar con la energía de una partícula y decir que ésta se conserva, pero esto está conceptualmente equivocado. Sólo puede justificarse en dos casos particulares:

## 8. Energía cinética del problema equivalente de un cuerpo

Para analizar el primero de estos dos casos, calculamos la energía cinética de un par de partículas en términos de las velocidades del centro de masa $\mathbf{v}_{cm}$ y de la coordenada relativa $\mathbf{v} = \mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \frac{m_2}{m_1+m_2}\mathbf{v} + \mathbf{v}_{cm} \qquad \text{y} \\ \mathbf{v}_2 &= -\frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{v} + \mathbf{v}_{cm} \ . \end{aligned}$$

Reemplazando en las expresión para la energía cinética, obtenemos, después de un poco de álgebra,

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{m_2}{M}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) + \frac{m_1}{M}\left(\frac{1}{2}Mv_{cm}^2\right) + m\mathbf{v}.\mathbf{v_{cm}} \qquad \text{y} \\ T_2 &= \frac{m_1}{M}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) + \frac{m_2}{M}\left(\frac{1}{2}Mv_{cm}^2\right) - m\mathbf{v}.\mathbf{v_{cm}} \ , \end{aligned}$$

donde $M = m_1 + m_2$ y $m = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ son las masas total y reducida del sistema. Sustituimos estas expresiones en la energía total del sistema

$$\begin{aligned} E &= T_1 + T_2 + V \\ &= \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} m v^2 + V \; . \end{aligned}$$

Como la velocidad del centro de masa $v_{cm}$ es constante, podemos eliminar el primer término en la energía (que está definida a menos de una constante arbitraria), escribiendo

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + V(r) \; .$$

Vemos que esta energía caracteriza a una partícula “ficticia” de masa reducida $m$ moviéndose en un campo de energía potencial $V(r)$. Esto permite justificar el uso de una terminología donde se habla de la energía total de una partícula y decir que esta se conserva. Pero debemos recordar que esto es una abstracción referida a una partícula “ficticia” representativa de un sistema de dos cuerpos en interacción mutua.

## 9. Energía de un sistema de dos cuerpos de masas muy distintas

Supongamos ahora que la partícula 2 tiene una masa mucho mayor que la partícula 1, $m_2 \gg m_1$. La ley de conservación de la cantidad de movimiento muestra que en una interacción entre ambas partículas

$$\Delta \mathbf{v}_2 = -\frac{m_1}{m_2} \Delta \mathbf{v}_1 \; .$$

O sea la partícula más pesada prácticamente no modifica su velocidad a orden $m_1/m_2$. Esto suena razonable si imaginamos –por ejemplo– que la Tierra no debería modificar su velocidad por su interacción gravitatoria con un objeto muy pequeño.

Como el centro de masa coincide prácticamente con el cuerpo más pesado, *v.g.*

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} + \mathbf{r}_{cm} \approx \mathbf{r} + \mathbf{r}_{cm} + \mathcal{O}(m_1/m_2) \qquad \text{y} \\ \mathbf{r}_2 &= -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r} + \mathbf{r}_{cm} \approx \mathbf{r}_{cm} + \mathcal{O}(m_1/m_2) \; , \end{aligned}$$

la posición de éste define un sistema aproximadamente inercial donde la energía reducida,

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + V(r) \approx \frac{1}{2} m_1 v^2 + V(r) + \mathcal{O}(m_1/m_2) \; ,$$

puede interpretarse como característica de la partícula 1 de posición $\mathbf{r}$ y velocidad $\mathbf{v}$.

Este resultado debe entenderse correctamente como una aproximación del problema equivalente de un cuerpo. Como $m_2$ es mucho mayor que $m_1$, su inercia es tan grande que difícilmente recibe algo de la energía cinética. Partiendo de las ecuaciones

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{m_2}{M} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) + \frac{m_1}{M} \left( \frac{1}{2} M v_{cm}^2 \right) + m \mathbf{v} . \mathbf{v_{cm}} \qquad \text{y} \\ T_2 &= \frac{m_1}{M} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) + \frac{m_2}{M} \left( \frac{1}{2} M v_{cm}^2 \right) - m \mathbf{v} . \mathbf{v_{cm}} \; , \end{aligned}$$

obtenemos que, en el sistema centro de masa (es decir, para $\mathbf{v}_{cm} = 0$),

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{m_2}{M} T \approx T \qquad \text{y} \\ T_2 &= \frac{m_1}{M} T \approx 0 \; , \end{aligned}$$

y por lo tanto la partícula más pesada apenas recibe algo de la energía cinética.

## 10. Corrección isotópica de la energía del átomo hidrogenoide

Ahora veremos una aplicación sencilla de los resultados anteriores. Un átomo está formado por un núcleo relativamente masivo, con dimensiones del orden de $10^{-12}$ cm, y un cierto número de electrones, que ocupan el resto del volumen atómico de unos $10^{-8}$ cm de radio. El núcleo está compuesto por $A$ partículas llamadas *nucleones*, de las cuales $Z$ son protones con carga eléctrica, y el resto neutrones, eléctricamente neutros. $A$ se denomina *número de masa* y $Z$ *número atómico*. Si hay tantos electrones como protones, es decir $Z$ electrones, el átomo es eléctricamente neutro. Si ello no ocurre, el átomo estará cargado positivamente o negativamente, dependiendo de que el número de electrones sea menor o mayor que el de protones en el núcleo. En tal caso el átomo se denomina *ion*.

La masa $m_2$ de un nucleón es aproximadamente 1836 veces la masa $m_1$ de un electrón. Debido a su menor inercia y –por ende– gran movilidad, son los electrones quienes confieren a un átomo la mayoría de sus propiedades, jugando un rol principal en procesos de emisión y absorción de luz, ligaduras moleculares, reacciones químicas o en las más importantes características de la materia sólida.

El átomo más simple es el átomo de hidrógeno. Su núcleo está compuesto por un protón al que está ligado un único electrón. En general, un átomo o ion con números de masa $A$ y atómico $Z$ arbitrarios, pero con un único electrón ligado, tendrá características similares a las del átomo de hidrógeno. Lo llamaremos átomo hidrogenoide. Son ejemplos de átomos hidrogenoides, los isótopos del Hidrógeno llamados Deuterio ($A = 2$, $Z = 1$) y Tritio ($A = 3$, $Z = 1$), el Helio ionizado $\mathrm{He}^+$ ($A = 4$, $Z = 2$) o el Litio doblemente ionizado $\mathrm{Li}^2+$ ($A = 7$, $Z = 3$).

Para describir el movimiento del sistema *electrón - núcleo*, lo reducimos a un problema equivalente de un cuerpo de masa $m = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ moviéndose en un campo eléctrico central atractivo. En general, podemos aprovechar que la masa del núcleo es suficientemente alta para aproximar la masa reducida del sistema electrón-núcleo por la del electrón exclusivamente, $m \approx m_1$. De esta manera, las ecuaciones de movimiento, y con ellas la estructura electrónica del átomo, no depende del número de masa $A$. Decimos que estamos despreciando posibles efectos *isotópicos*, ya que de lo contrario, obtendríamos que distintos isótopos de un mismo elemento tienen propiedades distintas. De hecho, dentro de un momento veremos que la energía total de un sistema de estas características, respecto del nivel de ionización (es decir cuando las dos partículas están infinitamente separadas una de otra), es directamente proporcional a la masa reducida, $E \propto m$. Por lo tanto, el pequeño corrimiento en la energía es del orden de

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{m - m_1}{m} = -\frac{m_1}{M} \approx -\frac{1}{1836 \times A} \approx -\frac{1}{A}\, 5{,}45 \times 10^{-4} \,.$$

Esto hace que, por ejemplo, la energía del Hidrógeno no sea exactamente igual a la cuarta parte de la del Helio ionizado, como uno esperaría de no mediar efectos isotópicos. Fue esta pequeñísima diferencia la que en 1868 condujo al descubrimiento del Helio por Frankland y Lockyer al analizar el espectro de la luz solar. Igualmente el corrimiento isotópico entre las energías del Hidrógeno y del Deuterio condujo a Urey y colaboradores al descubrimiento de este último isótopo en 1932.

## 11. Teorema del Virial

Antes de terminar, repasaremos la demostración de un teorema que adquirirá gran importancia en otros cursos, principalmente en Mecánica Estadística y Teoría Cinética de Gases. Volvamos, como siempre, a nuestro problema de dos partículas aisladas en interacción mutua. Trabajando un poco sobre la energía cinética, tenemos que

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m\, v^2 = \frac{1}{2} m\, \mathbf{v} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2} m\, \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}\right) - \frac{1}{2} m \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathbf{r} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2} m\, \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}\right) - \frac{1}{2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{r} \,. \end{aligned}$$

Promediando durante un lapso $\tau$, obtenemos

$$< T >= \frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{2}m\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}\Big|_{t=\tau} - \frac{1}{2}m\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}\Big|_{t=0}\right) - \frac{1}{2} < \mathbf{F}\cdot\mathbf{r} > \ .$$

Supongamos ahora que ambas partículas realizan un movimiento periódico de orbitación, de manera que después de un cierto tiempo $T$, que denominamos *período*, se vuelve a repetir la configuración inicial. En dicho caso, obtenemos

$$< T >= -\frac{1}{2} < \mathbf{F}\cdot\mathbf{r} > \ .$$

Tomando un tiempo $\tau$ suficientemente grande, se obtendría el mismo resultado, aún cuando el movimiento no fuese periódico, siempre que la distancia $\mathbf{r}$ y la velocidad $\mathbf{v}$ se conserven finitas, de manera que la cantidad $m\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}/2$ se mantenga acotada. La ecuación anterior se denomina "teorema del Virial", y el segundo miembro "Virial de Clausius". Aquí lo demostramos para un sistema de dos partículas, pero puede generalizarse fácilmente para un sistema con un número arbitrario de partículas

$$< T >= -\frac{1}{2}\sum_i < \mathbf{F}_i\cdot\mathbf{r}_i > \ .$$

Volviendo a nuestro problema de dos partículas aisladas, suponemos que la fuerza $\mathbf{F}$ es conservativa (o sea derivable de una energía potencial $\mathbf{F} = -\nabla V$, y central, es decir que su dirección coincide con la del vector posición $\mathbf{r}$. En este caso, podemos escribir

$$< T >= \frac{1}{2} < \frac{\partial V}{\partial r} r > \ .$$

Finalmente, si $V$ es una función potencial de $r$ de la forma $V = kr^n$, resulta

$$< T >= \frac{n}{2} < V > \ .$$

En el caso especial de una fuerza que, como la gravitatoria ó la electrostática, es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, $n$ es igual a $-1$, y por lo tanto

$$< T >= -\frac{1}{2} < V > \ .$$

Por ahora vamos a dejar esta ecuación aquí. Ya tendrán oportunidad de aplicarla en otros cursos. Su relación con la Termodinámica y la Teoría Cinética de Gases puede resultarles al menos previsible, si tienen en cuenta que este teorema fue demostrado en 1870 por Rudolf Clausius (1822-1888).

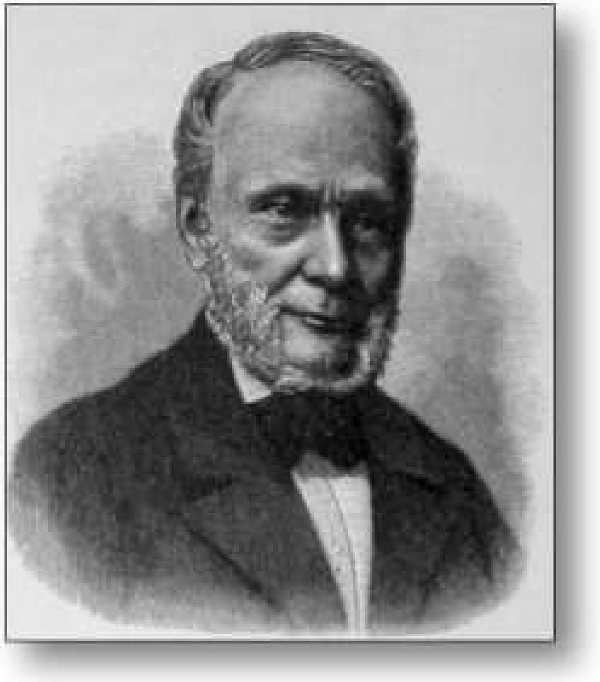

Figura 3. Junto con William Thomson (Lord Kelvin of Largs 1824-1907), el científico alemán Rudolf Julius Emanuel Clausius (2 de enero de 1822 - 24 de agosto de 1888),fue uno de los fundadores de la Termodinámica. El teorema del Virial constituyó uno de los últimos grandes trabajos de Clausius. Ese mismo año fue herido en una rodilla durante la Guerra Franco-Prusiana, mientras servía como conductor de una ambulancia. Esta herida lo dejaría levemente incapacitado el resto de su vida. Cinco años después murió su mujer mientras daba a luz a su sexto hijo. Este hecho prácticamente estancó su carrera científica. Sólo volvió al trabajo en los últimos años de su vida –principalmente en temas relacionados con la Electricidad–, cuando, con el tiempo, fue disminuyendo la presión de criar a sus seis hijos.

Por ahora, sólo vamos a utilizar el teorema del Virial para dar un sustento parcial a nuestra suposición anterior referida a que, si manteníamos todo lo demás igual, la energía de ligadura del átomo era proporcional a la masa. Usando el teorema del Virial vemos ahora rápidamente (aunque sin mucho rigor) que $E = - < T > \propto m$.

## Notas

[1] En Latín Ioannes (o Johannes) Marcus Marci. Nació el 13 de junio de 1595 en Lanǒkroun, en la frontera entre Bohemia y Moravia, actualmente República Checa. Falleció en Praga el 10 de abril de 1677.

[2] El escolasticismo fue una escuela de pensamiento que intentó utilizar la filosofía grecolatina clásica para comprender la revelación religiosa del cristianismo.

[3] También se suele expresar en el sentido de que el rotor de la fuerza es nulo, $\nabla \times \mathbf{F} = 0$.